La inestabilidad de Turing de las interacciones de especies pioneras y de culminación

Dr. J. Robert Buchanan

Bob.Buchanan@millersville.edu

Universidad de Millersville de Pennsylvania

Ecuaciones de modelo

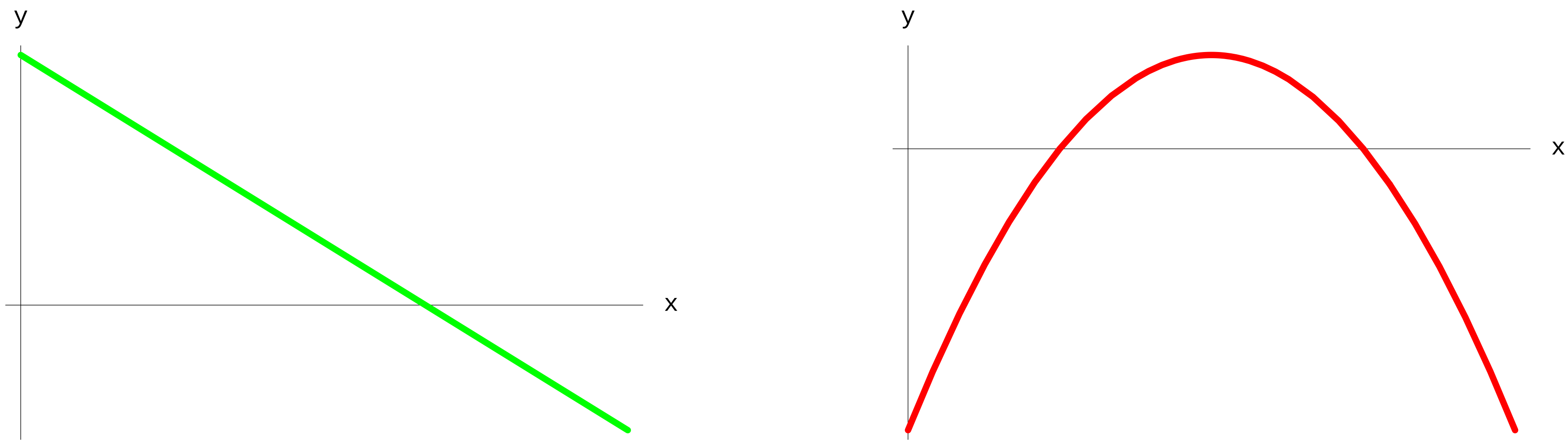
$$
\begin{aligned}
u_t &= uf(c_{11}u + v) + A_1 + D_1 u_{xx} \\
v_t &= vg(u + c_{22}v) + A_2 + D_2 v_{xx}
\end{aligned}
$$

Las funciones $f(z)$ y $g(z)$ representan la respuesta de salud reproductora per cápita a la media ponderada de las densidades de las especies u y v.
Las constantes A_1 y A_2 representan fuerzas externas como sembrado y cosechado de las especies.

Las constantes D_1 y D_2 son los ritmos de difusión de las especies.

Aptitudes de pioneras y de culminación

- *Pioneras* de salud son funciones de densidades continuas y monótonas decrecientes.
- *Culminación* de salud son funciones de densidades continuas que aumentan en densidades bajas y disminuyen en densidades altas.



Pioneras Culminación

Equilibrios

Supongamos que $A_1 = A_2 = 0$ y las desigualdades siguientes se cumplen:

$$1 - c_{11}c_{22} > 0, \qquad z_2 - c_{22}z_1 > 0, \qquad z_1 - c_{11}z_2 > 0,$$

Entonces los equilibrios están separados y en $\mathbb{R}^2_+$.
Consideremos el equilibrio

$$(e_u, e_v) = \left(\frac{z_2 - c_{22}z_1}{1 - c_{11}c_{22}}, \frac{z_1 - c_{11}z_2}{1 - c_{11}c_{22}} \right).$$

Objetivos

- Determinar las condiciones de los coeficientes de difusiones D_i para los cuales el modelo sufre una bifurcación de Turing.
  La bifurcación de Turing pone un equilibrio inestable en las perturbaciones que no son homogéneas en el espacio mientras mantienen estabilidad en las perturbaciones que son homogéneas.
- Determinar las condiciones en las que las fuerzas constantes A_1 y A_2 pueden volver al revés una bifurcación de Turing inducida por un cambio en los coeficientes de difusiones D_i.

Auto valores

$$L(k) = \begin{bmatrix} c_{11}e_u f'(z_1) - D_1k^2 & e_u f'(z_1) \\ e_v g'(z_2) & c_{22}e_v g'(z_2) - D_2k^2 \end{bmatrix}$$

Los auto valores del operador de difusión en el intervalo $(0,\pi)$ son $-k^2$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} L(k) &= -k^2(D_1 + D_2) + c_{11}e_u f'(z_1) + c_{22}e_v g'(z_2) \\ \det L(k) &= D_1D_2k^4 - k^2(D_1c_{22}e_v g'(z_2) + D_2c_{11}e_u f'(z_1)) - \\ & \quad e_ue_v f'(z_1)g'(z_2)(1 - c_{11}c_{22}) \end{aligned}$$

Los auto valores tienen partes reales negativas cuando $\mathrm{tr} L(k) < 0$ y $\det L(k) > 0$.

Estabilidad homogénea

Para un c_{11} fijo entonces (e_u, e_v) está separado cuando $c_{22} < \min\{1/c_{11}, z_2/z_1\}$.
Entonces cuando

$$c_{22} < \min\left\{\frac{1}{c_{11}}, \frac{c_{11}z_2 f'(z_1)}{c_{11}z_1 f'(z_1) - (z_1 - c_{11}z_2)g'(z_2)}\right\}$$

tenemos $\mathrm{tr}L(0) < 0$ y (e_u, e_v) separado en $\mathbb{R}^2_+$, y estable asintóticamente.

Como $\mathrm{tr}L(k) < \mathrm{tr}L(0) < 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ entonces la inestabilidad puede ocurrir cuando $\det L(k) = 0$ para algún k.

Bifurcación

Los auto valores de $L(k)$ son reales y simples. Un auto valor pone 0 cuando D_2 cambia. $\det L(k) = 0$ está equivalente a

$$c_{22} = \frac{D_1 D_2 k^4 - z_2 f'(z_1)\left(c_{11} D_2 k^2 + (z_1 - c_{11} z_2) g'(z_2)\right)}{\left(D_1 k^2 - z_1 f'(z_1)\right)\left(c_{11} D_2 k^2 + (z_1 - c_{11} z_2) g'(z_2)\right)} > 0.$$

Así es que cuando

$$D_2 < \hat{D}_2 = \frac{z_2 f'(z_1) g'(z_2)\left(c_{11} D_1 k^2 - (z_1 - c_{11} z_2) g'(z_2)\right)}{D_1 k^4 \left(c_{11} f'(z_1) - g'(z_2)\right) + c_{11} k^2 z_2 f'(z_1) g'(z_2)}$$

el punto fijo pone inestable las perturbaciones que no están homogéneas en el espacio.

Pérdida de estabilidad

Desde que

$$\left.\frac{d\lambda_k}{dD_2}\right|_{\hat{D}_2} = \frac{D_1 k^4 - c_{11} e_u f'(z_1) k^2}{\mathrm{tr} L(k)} < 0.$$

El punto fijo pierde estabilidad cuando D_2 disminuye por $\hat{D}_2$ que causa un auto valor aumentar por 0.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
u_t &= u(1 - \frac{1}{3}u - v) + 2u_{xx} \\
v_t &= -v(1 - u - \frac{9}{20}v)(\frac{3}{2} - u - \frac{9}{20}v) + D_2 v_{xx}
\end{aligned}
$$

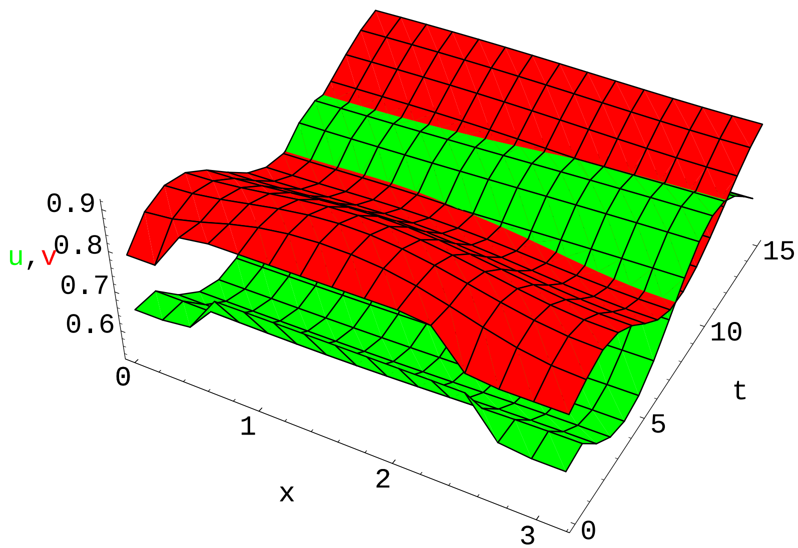
Equilibrio: $(e_u, e_v) = (11/17, 40/51)$

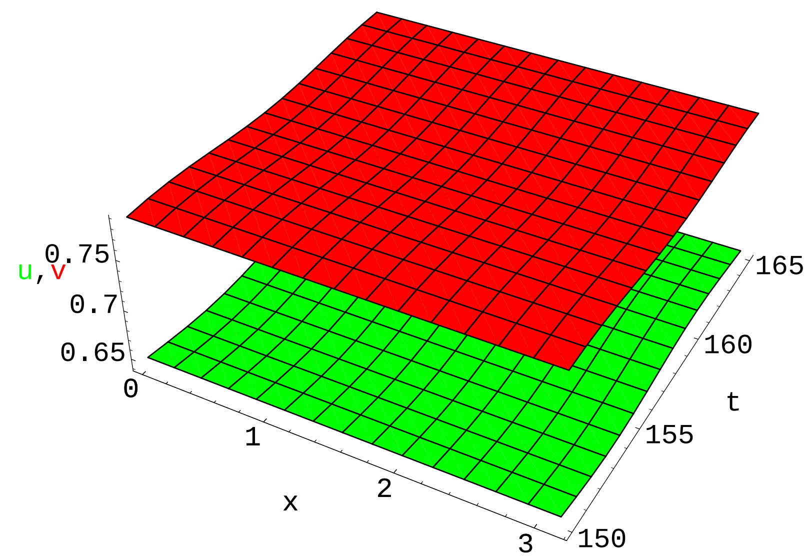
$$
L(k) = \begin{bmatrix} -11/51 - 2k^2 & -11/17 \\ 20/51 & 3/17 - D_2 k^2 \end{bmatrix}
$$

$\det L(1) = 0$ cuando $D_2 = 7/113$.

Las pertubaciones no-homogénas

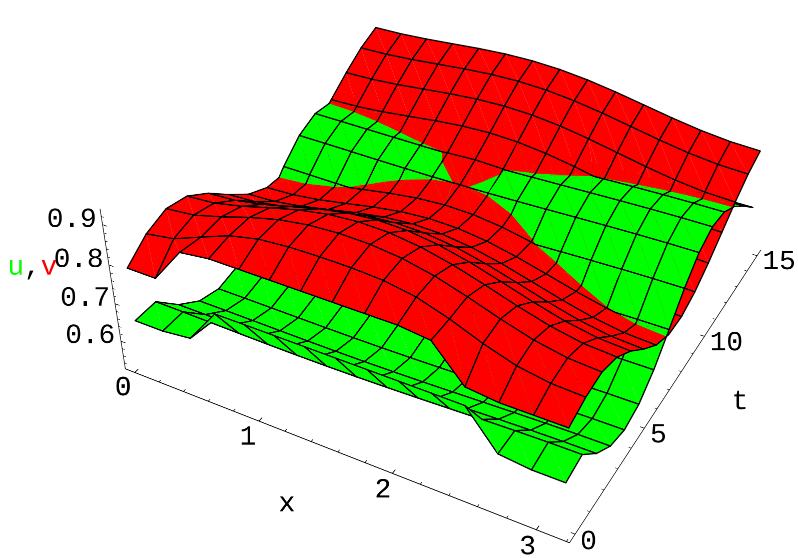
$D_2 = 1/10$, $u(x,0) = 11/17 + B(x;\pi/3, 2\pi/3)$,
$v(x,0) = 40/51 + B(x;\pi/4,\pi/2)$

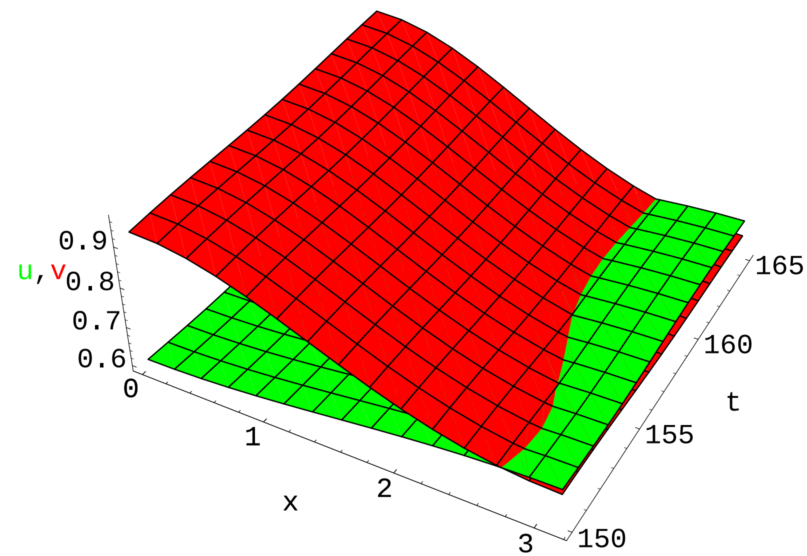




Inestabilidad en las pertubaciones

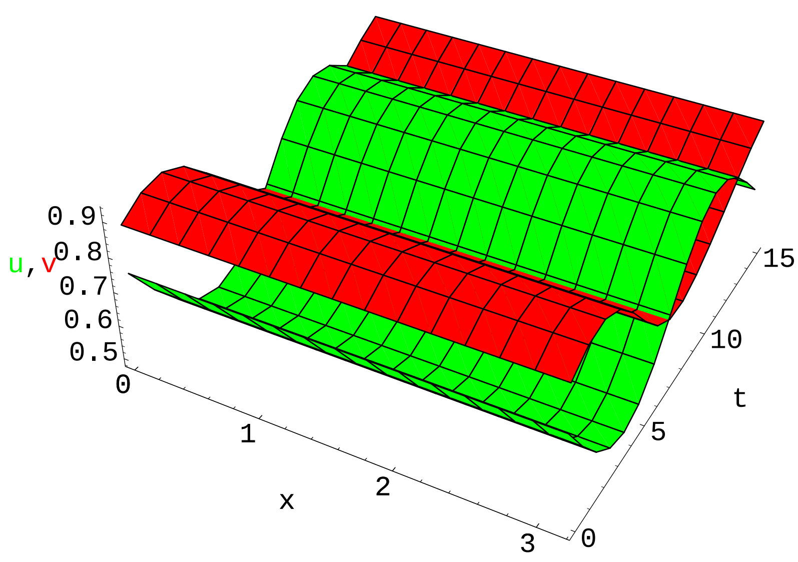
$D_2 = 1/20$, $u(x,0) = 11/17 + B(x;\pi/3, 2\pi/3)$,
$v(x,0) = 40/51 + B(x;\pi/4, \pi/2)$

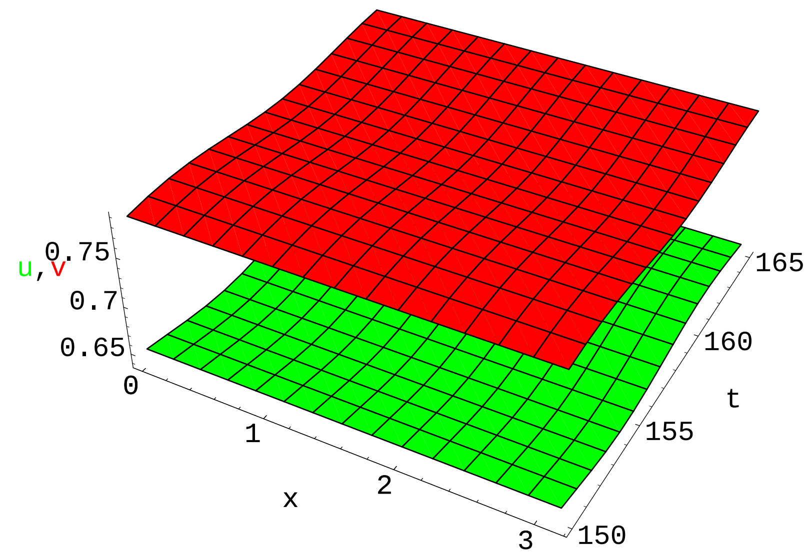




Las pertubaciones homogénas

$D_2 = 1/20$, $u(x,0) = 0.7471$, $v(x,0) = 0.8843$





Los efectos de fuerzas

Consideremos la situación de $A_1 \neq 0$ y $A_2 = 0$.
La constante A_1 representa una fuerza externa como sembrado o cosechado.
El equilibrio (e_u, e_v) soluciona:

$$\begin{aligned} uf(c_{11}u + v) + A_1 &= 0 \\ u + c_{22}v &= z_2 \end{aligned}$$

La linearización en este punto fijo nos da

$$L(k; A_1) = \begin{bmatrix} c_{11}uf'(c_{11}u + v) - D_1k^2 - \frac{A_1}{u} & uf'(c_{11}u + v) \\ vg'(z_2) & c_{22}vg'(z_2) - D_2k^2 \end{bmatrix}$$

Dos ecuaciones

Supongamos que $v = (z_2 - u)/c_{22}$ y elimina v de $\det L(k; A_1) = 0$ y $uf(c_{11}u + v) + A_1 = 0$.
Tenemos 2 ecuaciones con 3 desconocidos (u, A_1, D_2):

$$
\begin{aligned}
G_1(u, A_1, D_2) &= uf(c_{11}u + \frac{z_2 - u}{c_{22}}) + A_1 \\
H_1(u, A_1, D_2) &= D_1 D_2 k^4 - \frac{A_1}{u}(z_2 - u)g'(z_2) - \\
& \quad k^2(D_1(z_2 - u)g'(z_2) + \\
& \quad\quad D_2 c_{11} u f'(c_{11}u + \frac{z_2 - u}{c_{22}}) - \frac{A_1}{u}) - \\
& \quad (\frac{1}{c_{22}} - c_{11})u(z_2 - u)f'(c_{11}u + \frac{z_2 - u}{c_{22}})g'(z_2)
\end{aligned}
$$

Teorema de función implícita

La inestabilidad ocurre cuando $(G, H)(u, A_1, D_2) = (0, 0)$. Usando el Teorema de función implícita. Cuando

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial A_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial A_1} \end{array} \right|_{(e_u, 0, \hat{D}_2)} \neq 0$$

tenemos $A_1 \equiv A_1(D_2)$.

$A_1 \equiv A_1(D_2)$

$$\left.\frac{dA_1}{dD_2}\right|_{\hat{D}_2} = -\frac{\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial G_1}{\partial D_2} & \frac{\partial G_1}{\partial u} \\ \frac{\partial H_1}{\partial D_2} & \frac{\partial H_1}{\partial u} \end{array}\right|_{(e_u,0,\hat{D}_2)}}{\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial A_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial A_1} \end{array}\right|_{(e_u,0,\hat{D}_2)}}.$$

Otro ejemplo

$$\begin{aligned} u_t &= u(1-\frac{1}{3}u-v)+A_1+2u_{xx} \\ v_t &= -v(1-u-\frac{9}{20}v)(\frac{3}{2}-u-\frac{9}{20}v)+D_2v_{xx} \end{aligned}$$

$$\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial A_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial A_1} \end{array}\right|_{(11/17,0,7/113)} = \frac{655-803k^2}{90} \neq 0$$

si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\frac{dA_1}{dD_2} = \frac{110k^2(11+102k^2)}{51(5+83k^2)} > 0.$$

Con cosechado

$D_2 = 1/20$, $A_1 = -1/25$, $u(x,0) = 11/17 + B(x;\pi/3, 2\pi/3)$,
$v(x,0) = 40/51 + B(x;\pi/4, \pi/2)$